

1 (Sem-1/FYUGP) MAT 41 MN/(B)

2 0 2 5

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT4100104MN

(Classical Algebra)

(Set-B)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

then write the values of $\arg z_1 z_2$ and
 $\arg \frac{z_1}{z_2}$.

(2)

যদি

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

তেজ্ঞে $\arg z_1 z_2$ আৰু $\arg \frac{z_1}{z_2}$ ৰ মান কি হ'ব,
লিখা।

(b) What is the polar form of the complex number $(i^3)^{15}$?

জটিল সংখ্যা $(i^3)^{15}$ ৰ ক্ৰমীয় ৰূপটো কি হ'ব?

(c) What is meant by the symmetric functions of roots of an equation?

সমীকৰণ এটাৰ মূলৰ প্ৰতিসম ফলন বুলিলে কি বুজা?

(d) If α, β are the roots of $x^2 + px + q = 0$, then what is the value of $\alpha\beta$?

যদি α, β , সমীকৰণ $x^2 + px + q = 0$ ৰ মূল হয়, তেজ্ঞে $\alpha\beta$ ৰ মান কি হ'ব?

(e) If

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ and } \bar{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

then compute $(A\bar{x})^T$.

26A/238

(Continued)

(3)

যদি

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ আৰু } \bar{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ হয়}$$

তেজ্ঞে $(A\bar{x})^T$ গণনা কৰা।

(f) Find the polar representation of $z = 2i$.
 $z = 2i$ ৰ মেক উপস্থাপন কৰা।

(g) Is $\log(-i)^{1/m} = (1/m) \log(-i)$ true for any positive integer m ?

যি কোনো ধনাত্মক পূৰ্ণসংখ্যা m ৰ বাবে $\log(-i)^{1/m} = (1/m) \log(-i)$ সত্য হয়নে?

(h) In Cardon's formula, what substitution is commonly used to eliminate the quadratic term?

কাৰ্ডনৰ সূত্ৰত দ্বিঘাত পদটো আঁতৰাবলৈ সাধাৰণতে কি প্ৰতিস্থাপন ব্যৱহাৰ কৰা হয়?

2. Answer the following questions (any six) :

2×6=12

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো ছয়টা) :

(a) Find the principal value of argument of $-2 - 2i$.

$-2 - 2i$ ৰ আৰম্ভমেন্টৰ প্ৰধান মান উলিওৱা।

26A/238

(Turn Over)

(4)

(b) Prove that

প্রমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\sin\theta + i\cos\theta} \right)^4 = \cos 8\theta + i\sin 8\theta$$

(c) Find the cube root of 1.

1ৰ ঘনমূল উলিওৱা।

(d) Split up $e^{(6+5i)^2}$ into real and imaginary parts.

$e^{(6+5i)^2}$ ক বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশত বিভক্ত কৰা।

(e) Show that $\tanh z$ is a periodic function of period πi .

দেখুওৱা যে $\tanh z$ হৈছে πi সময়কালৰ এটা সময়কালীন ফলন।

(f) For the polynomial $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, find the sum of roots.

বহুপদ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ৰ বাবে মূলৰ যোগফল উলিওৱা।

(5)

(g) State any two methods for finding the rank of a matrix.

মৌলকক্ষ এটাৰ বেংক (rank) উলিওৱাৰ যি কোনো দুটা পদ্ধতি উল্লেখ কৰা।

(h) Find the roots of the equation $2x^3 - x^2 - 32x + 16 = 0$, if two of them are equal in magnitude but opposite in sign.

যদি $2x^3 - x^2 - 32x + 16 = 0$ ৰ দুটা মূলৰ মান সমান কিন্তু চিহ্নত বিপৰীত, তেন্তে সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ উলিওৱা।

(i) Find the minor and cofactor of 2 and 7 for the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

তলত দিয়া মেট্ৰিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ ৰ}$$

ৰাৰে 2 আৰু 7 ৰ গৌণ আৰু সহকাৰক নিৰ্ণয় কৰা।

(6)

- (i) Find the trace of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

মেক্স

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ ব}$$

ট্রেচ উলিওৰা।

3. Answer the following questions (any four) : 5x4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো চাৰিটা) :

- (a) Find the polar representation of the complex number $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

জটিল সংখ্যা $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ ব
মেক উপস্থাপন উলিওৰা।

- (b) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta} \right)^n$$

$$= \cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\theta\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2} - n\theta\right)$$

(Continued)

(7)

- (c) Express $\log[\log(\cos\theta + i\sin\theta)]$ in the form $A + iB$.

$\log[\log(\cos\theta + i\sin\theta)]$ ক $A + iB$ ব আকাৰত
প্ৰকাশ কৰা।

- (d) If α, β, γ are the roots of $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then find the value of $\sum \left(\frac{\beta + \gamma}{\gamma + \beta} \right)$.

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল α, β, γ

হ'লে $\sum \left(\frac{\beta + \gamma}{\gamma + \beta} \right)$ ব মান উলিওৰা।

- (e) Transform the equation

$$2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = 0$$

into one in which second term is missing and hence solve the equation.

$2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = 0$ সমীকৰণটোক দ্বিতীয়
পদটো নোহোৱা হোৱা সমীকৰণটো ৰূপান্তৰিত কৰা আৰু
সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

- (f) Derive the relations between the roots and coefficients of a cubic equation and explain how they are used to solve problems.

(8)

যন সমীকৰণৰ মূলসমূহ আৰু সহগসমূহৰ মাজৰ সম্পৰ্ক উদ্ভাৱন কৰা আৰু এই সম্পৰ্কসমূহ কিদৰে সমস্যা সামাধানত ব্যৱহাৰ হয়, ব্যাখ্যা কৰা।

(g) Find $f(A)$, if $f(x) = x^2 - 5x - 14$ and

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$f(A)$ উলিওৱা যদি $f(x) = x^2 - 5x - 14$ আৰু

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(h) Find the rank of the following matrix :

তলৰ মেট্ৰিক্সটোৰ ৰেংক (rank) উলিওৱা :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 12 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Answer the following questions (any two) :

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো দুটা) :

10×2=20

(a) (i) State and prove De Moivre's theorem for integral powers. 1+4=5

পূৰ্ণাংক ঘাতৰ বাবে ডি ম'ইভাৰৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(9)

(ii) Apply De Moivre's theorem to find an equation whose roots are the n th powers of the roots of the equation $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$.

5

ডি ম'ইভাৰৰ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি এনে এটা সমীকৰণ উলিওৱা যাৰ মূলবোৰ হৈছে $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূলৰ n তম ঘাত।

(b) State Cardon's method for solving a cubic equation. Use Cardon's method to solve $x^3 - 6x^2 - 6x - 7 = 0$.

যন সমীকৰণ সমাধান কৰিব পৰা কাৰ্ডনৰ নিয়ম বৰ্ণনা কৰা। কাৰ্ডনৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি $x^3 - 6x^2 - 6x - 7 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(c) Find the equation whose roots are the roots of the equation $x^4 - 8x^2 + 8x + 6 = 0$, each diminished by 2. Use Descartes' rule of signs to both equations to find the possible number of real and complex roots.

সেই সমীকৰণটো উলিওৱা যাৰ মূলবোৰ সমীকৰণ $x^4 - 8x^2 + 8x + 6 = 0$ ৰ মূল, প্ৰত্যেকটো 2ৰে হ্রাস কৰা। বাস্তৱ আৰু জটিল মূলৰ সম্ভাৱ্য সংখ্যা বিচাৰি উলিয়াবলৈ দুয়োটা সমীকৰণলৈ ডেকাৰ্টৰ চিহ্নৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰা।

(Turn Over)

(10)

- (d) (i) Reduce the following matrix to row echelon form, determine its rank and identify the basic columns :

5

নিম্নলিখিত মৌলকক্ষটোক শাৰী ইচেলন আকৃতিত হ্রাস কৰা, ইয়াৰ বেংক (rank) নিৰ্ধাৰণ কৰা আৰু মূল স্তম্ভসমূহ চিনাক্ত কৰা :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (ii) Find the inverse of the following matrix :

5

তলৰ মৌলকক্ষটোকৰ প্ৰতিলোম উলিওৱা :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- (e) Are all homogeneous systems of linear equations consistent? When does a homogeneous system of linear equations possess a unique solution? Explain. Further, show that the following homogeneous system has infinitely many solutions, and obtain its general solution :

26A/238

(Continued)

(11)

বৈখিক সমীকৰণৰ সকলো সমজাতীয় প্ৰণালী সামঞ্জস্যপূৰ্ণ নেকি? বৈখিক সমীকৰণৰ এটা সমজাতীয় প্ৰণালী কেতিয়া একক সমাধানৰ অধিকাৰী হয়? ব্যাখ্যা কৰা। ইয়াৰ উপৰিও দেখুওৱা যে তলত দিয়া সমজাতীয় প্ৰণালীটোৰ অসীমভাৱে বহুত সমাধান আছে, আৰু ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান আহৰণ কৰা :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

26A-4500/238

1 (Sem-1/FYUGP) MAT 41 MN/(B)